

Dorinel-Mihai Crăciun • Ioan Săcăleanu
Alina Crăciun • Bogdan Dorneanu

MATEMATICĂ

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASA A VI-A

Semestrul al II-lea

ALGEBRĂ

Capitolul 1

Rapoarte și proporții

1. Rapoarte și procente; probleme în care intervin procente

Fie $x, y \in \mathbb{Q}_+, y \neq 0$. Numărul rațional $x : y$ se numește **raportul numerelor x și y** și se notează $\frac{x}{y}$; x și y se numesc **termenii raportului**.

EXEMPLE:

$$1. \frac{6,2}{3,4}; \quad 2. \frac{4}{5,6}; \quad 3. \frac{11}{20}; \quad 4. \frac{1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{3}}$$

OBSERVAȚII:

1. Pentru orice $x \neq y \neq 0$, $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$.
2. $\frac{x}{y} = x : y$.

PROPRIETATE: **Valoarea raportului** $\frac{x}{y}$ este numărul z cu proprietatea $x = y \cdot z$.

EXEMPLE:

1. $\frac{16,5}{3} = 16,5 : 3 = 5,5$; valoarea raportului $\frac{16,5}{3}$ este 5,5.

2. $\frac{10}{4} = 10 : 4 = 5 : 2 = 2,5$; valoarea raportului $\frac{10}{4}$ este 2,5.

Rapoartele de forma $\frac{p}{100}$ se numesc **rapoarte procentuale**. Ele se notează $p\%$ și se citesc „ p la sută” sau „ p procente”.

EXEMPLE:

1. $14,18\% = \frac{14,18}{100}$

2. $15\% = \frac{15}{100}$

3. $118,2\% = \frac{118,2}{100}$.

✓ **EXERCIIII REZOLVATE:**

1. Scrieți raportul dintre cel mai mare număr de două cifre și cel mai mic număr de două cifre.

Soluție: $\frac{99}{10} = 9,9$.

2. Scrieți raportul numerelor:

a) 63 și 81;

b) 13 și 100;

c) 300 și 50.

Soluții: a) $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$; b) $\frac{13}{100} = 0,13$; c) $\frac{300}{50} = 6$.

PROPRIETATE: Raportul a două mărimi exprimate cu aceeași unitate de măsură este raportul numerelor prin care se exprimă cele două mărimi.

✓ **EXERCIIII REZOLVATE:**

1. Un pom are înălțimea de 3 m, iar un alt pom este înalt de 12 m. De câte ori este mai înalt al doilea pom decât primul?

Soluții: $\frac{12 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \frac{12}{3} = 4$, deci al doilea pom este de 4 ori mai înalt decât primul.

2. Într-un vas se află 14 l de apă, iar în alt vas 2 l de apă. De câte ori este mai mare volumul de apă din primul vas decât volumul de apă din al doilea vas?

Soluții: Avem $\frac{14 \text{ l}}{2 \text{ l}} = \frac{14}{2} = 7$. Deci volumul de apă din primul vas este de 7 ori mai mare decât volumul de apă din al doilea vas.

► **Scara unei hărți**, notată cu S , este raportul dintre distanța pe hartă și distanța pe teren. Se scrie: $S = \frac{\text{distanța pe hartă}}{\text{distanța pe teren}}$.

✓ **EXERCITIUL REZOLVAT:**

Aflați scara unei hărți dacă la un segment de 1 mm pe hartă îi corespunde în teren o distanță egală cu 10 km.

Soluție: 10 km = 10 000 000 mm. Avem $S = \frac{1}{10\,000\,000}$ sau 1 : 10 000 000.

► **Titlul unui aliaj**, notat cu T , este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului. Se scrie: $T = \frac{\text{masa metalului prețios}}{\text{masa aliajului}}$.

✓ **EXERCITIUL REZOLVAT:**

Un aliaj conține 160 g aur și 780 g cupru. Aflați titlul aliajului.

Soluție: $T = \frac{160}{780+160} = \frac{160}{940} = \frac{8}{47} \approx 0,170$.

► **Concentrația unei soluții**, notată cu C , este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției. Se scrie: $C = \frac{\text{masa substanței}}{\text{masa soluției}}$.

✓ **EXEMPLU REZOLVAT:**

Se dizolvă 20 g de sare în 260 g apă. Aflați concentrația soluției.

Soluție: Avem $C = \frac{20}{260+20} = \frac{20}{280} = \frac{1}{14} \approx 0,071$.

PROPRIETATE: $p\%$ din a este produsul dintre $\frac{p}{100}$ și a , adică: $\frac{p}{100} \cdot a = \frac{p \cdot a}{100}$.

✓ **EXERCITIILE REZOLVATE:**

1. Aflați 30% din suma 1 500 lei.

Soluție: $\frac{30}{100} \cdot 1\,500 = \frac{30 \cdot 1\,500}{100} = 450$ lei

2. Din cei 600 de elevi ai unei școli, 55% sunt fete. Câți băieți sunt în școală?

Soluție: $\frac{55}{100} \cdot 600 = \frac{55 \cdot 600}{100} = 330$ fete, deci 270 băieți.

Astfel, vor fi 45% băieți, adică: $\frac{45}{100} \cdot 600 = \frac{45 \cdot 600}{100} = 270$ băieți.

OBSERVAȚII:

1. Dacă $0 \leq \frac{p}{100} < 1$, atunci $\frac{p}{100} \cdot a < a$.
2. Dacă $\frac{p}{100} = 1$, atunci $\frac{p}{100} \cdot a = a$.
3. Dacă $\frac{p}{100} > 1$, atunci $\frac{p}{100} \cdot a > a$.

PROPRIETATE:

Dacă numărul a crește cu $p\%$, atunci se scrie: $a + \frac{p}{100} \cdot a$.

Dacă numărul a scade cu $p\%$, atunci se scrie: $a - \frac{p}{100} \cdot a$.

✓ **EXERCIȚII REZOLVATE:**

1. 600 lei reprezintă 30% dintr-o sumă de bani. Aflați suma de bani.

Soluție: Avem de rezolvat ecuația: $\frac{30}{100}x = 600 \Rightarrow x = \frac{600 \cdot 100}{30} \Rightarrow x = 2\ 000$ lei.

2. Aflați x dacă:

- a) 20% din el este 160;
- b) 70% din el este 400;
- c) 125% din el este 8 100.

Soluții:

$$a) \frac{20}{100}x = 160 \Rightarrow x = \frac{160 \cdot 100}{20} = 800;$$

$$b) \frac{70}{100}x = 400 \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 100}{70} = 571,4285;$$

$$c) \frac{125}{100}x = 8\ 100 \Rightarrow x = \frac{8\ 100 \cdot 100}{125} = 6\ 480.$$

PROPRIETATE: Raportul procentual al două numere date se obține prin scrierea raportului lor ca un raport cu numitorul 100.

✓ **EXERCIȚII REZOLVATE:**

1. Scrieți sub formă de raport procentual:

a) $\frac{2}{5}$;

b) $\frac{6}{4}$;

c) $\frac{1}{2}$;

d) $\frac{6}{20}$.

Soluții:

$$a) \quad {}^{20)} \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%;$$

$$b) \quad {}^{25)} \frac{6}{4} = \frac{150}{100} = 150\%;$$

$$c) \quad {}^{50)} \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%;$$

$$d) \quad {}^{5)} \frac{6}{20} = \frac{30}{100} = 30\%.$$

2. Din 800 de flori plantate, au înflorit 640. Aflați cât la sută din numărul florilor au înflorit.

Soluție: Avem $\frac{640}{800} = \frac{80}{100} = 80\%$.

PROPRIETATE: $p\%$ din $q\%$ este egal cu $\frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100} = \frac{pq}{10\,000}$.

✓ **EXERCIȚIU REZOLVAT:**

Într-o zi, Ana cheltuiește 30% dintr-o sumă de bani. A doua zi cheltuiește cu 40% din cât a cheltuit în prima zi. Cât la sută din sumă a cheltuit Ana a doua zi?

Soluție: Fie x suma de bani. În prima zi cheltuiește $\frac{30}{100}x$, iar a doua zi

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100}x = \frac{12}{100}x. \text{ A doua zi a cheltuit } 12\% \text{ din suma de bani.}$$

PROPRIETATE: $p^0/_{00}$ se citește „p la mie” și înseamnă $\frac{p}{1\,000}$.

EXEMPLU:

O soluție are $15^0/_{00}$ sare. Înseamnă că la 1 000 kg de soluție sunt 15 kg sare.

✓ **EXERCIȚII REZOLVATE:**

1. Aflați $18^0/_{00}$ din 6 000 kg.

Soluție: Avem $\frac{18}{1\,000} \cdot 6\,000 = 108$ kg.

2. Aflați $50^0/_{00}$ din 2 500.

Soluție: Avem $\frac{50}{1\,000} \cdot 2\,500 = 125$.

OBSERVAȚIE: Calculele cu $p^0/_{00}$ se fac exact ca la procente.



Exerciții și probleme propuse

*

1. Scrieți raportul numerelor x și y , apoi pe cel al numerelor y și x și calculați valoarea acestor rapoarte în următoarele cazuri:

a) $x = 12, y = 22$;

b) $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{8}$;

c) $x = 1\frac{1}{2}, y = 2\frac{3}{4}$;

d) $x = 15,18, y = 16,14$;

e) $x = 1(3), y = 2(4)$;

f) $x = 1,2(5), y = 3,4(7)$.

2. Se știe că $\frac{a}{b} = 15$ și $\frac{b}{c} = 90$. Aflați:

a) $\frac{a}{c}$;

b) $\frac{a^2}{b^2}$;

c) $\frac{b^2}{c^2}$;

d) $\frac{5a}{b}$;

e) $\frac{3b}{2c}$.

3. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{11}{15}$. Aflați:

a) raportul perimetrelor;

b) raportul ariilor.

4. Lungimea unui dreptunghi este de 5 ori mai mare decât lățimea sa.

a) Care este raportul dintre lățime și lungime?

b) Ce fracție din lungime reprezintă lățimea?

5. Se știe că $\frac{a}{b} = \frac{7}{9}$. Să se calculeze rapoartele:

a) $\frac{5a}{3b}$;

b) $\frac{a}{2b}$;

c) $\frac{0,7a}{1,(5)b}$;

d) $\frac{b^2}{a^2}$.

6. Calculați valoarea următoarelor rapoarte:

a) $\frac{400}{750}$;

b) $\frac{5,671}{2,376}$;

c) $1\frac{2}{5}$;
 $2\frac{3}{7}$

d) $\frac{2,(17)}{1,(3)}$

7. Determinați concentrația unei soluții în cazurile:

- a) 360 g apă și 30 g apă; b) 780 g apă și 150 g zahăr.

8. Determinați titlul unui aliaj în următoarele cazuri:

- a) 210 g aur și 860 g aramă; b) 190 g aur și 1 214 g aramă.

9. Aflați scara unei hărți în următoarele cazuri:

- a) o distanță de 60 km din teren se reprezintă pe hartă printr-un segment de 3 cm;
 b) o distanță de 120 km din teren se reprezintă pe hartă printr-un segment de 4 cm;
 c) un segment de 3,5 cm de pe hartă reprezintă pe teren o distanță de 70 km.

10. Într-o clasă sunt 18 băieți și 12 fete.

- a) Calculați raportul dintre numărul fetelor și numărul băieților.
 b) Calculați raportul dintre numărul băieților și numărul elevilor.

11. Se știe că $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ și $\frac{a}{c} = 16$. Aflați:

- a) $\frac{b}{c}$; b) $\frac{c}{b}$;
 c) $\frac{b^2}{c^2}$; d) $\frac{c^2}{b^2}$.

12. Scrieți ca raport procentual:

- a) $\frac{17}{8}$; b) $\frac{14}{4}$; c) $\frac{18}{10}$;
 d) 0,45; e) 0,412; f) $\frac{13}{150}$;
 g) $\frac{16}{5}$; h) $\frac{6}{25}$.

13. Aflați un număr x dacă:

- a) 15% din x este 128; b) 45% din x este 16,3;
 c) 85% din x este 930; d) 20% din x este 524,16.

14. Stabiliți cât la sută reprezintă a din b în următoarele cazuri:

- a) $a = 20$, $b = 80$; b) $a = 70$, $b = 150$;
 c) $a = 16$, $b = 50$; d) $a = 200$, $b = 90$.

24. Raportul dintre măsura complementului și măsura suplementului unui unghi este:

- a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{3}$.

Aflați, în fiecare caz, măsura unghiului.

25. Diferența a două numere este 1 961, iar raportul lor este $\frac{2}{3}$. Aflați numerele.
26. Ion are la bancă suma de 45 000 lei. Anual primește o dobândă de 15%. Ce sumă va avea după 1 an?
27. O bancă acordă o dobândă de 8% pe an. Ce sumă trebuie să depună un client ca după 1 an să primească 6 500 lei?
28. Un obiect costă 850 lei. După o scumpire, acesta costă 1 200 lei. Cu ce procent s-a majorat prețul?
29. Se știe că 20% dintr-o cantitate de lapte este smântână, iar 22% dintr-o cantitate de smântână este unt. Să se afle din câte kilograme de lapte se pot obține 70 kg unt.
30. În ce cantitate de apă trebuie dizolvate 500 g de sare pentru a obține o soluție cu concentrația de 6%?
31. Titlul unui aliaj de aur cu aramă este 0,710. Știind că aliajul are masa de 650 g, să se afle masa metalului prețios.
32. La ieșirea din fabrică, un produs are prețul de 650 lei. I se aplică TVA de 24% și un adaos comercial de 20%. Care va fi prețul de vânzare al produsului?
33. La un magazin, prețul unui produs s-a redus cu 20%, apoi s-a scumpit cu 30%. La un alt magazin, prețul unui produs similar s-a mărit cu 20%. În care magazin prețul la vânzare este mai mic?
34. Vlad avea depusă la bancă o sumă de bani din care a scos într-o zi 30%. Într-o altă zi, a mai scos 40% din rest și a constatat că suma rămasă este 2 400 lei. Ce sumă avea depusă Vlad la bancă?
35. Trei asociați hotărăsc să investească pentru a achiziționa un teren agricol. Primul investește 25% din valoarea terenului, al doilea 30%, iar al treilea, restul. Dacă al treilea a investit cu 26 000 lei mai mult decât primul, să se afle:
- a) valoarea de achiziție a terenului;
- b) cât a investit fiecare.

2. Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție

► Se numește **proporție** egalitatea a două rapoarte.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+, b \neq 0, d \neq 0$. O proporție se scrie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde a, b, c și d sunt **termenii proporției**, dintre care a și d se numesc **extremi**, iar b și c se numesc **mezi**.

EXEMPLE:

- $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ este o proporție; 3, 2, 15 și 10 sunt termenii proporției, 3 și 10 sunt extremii, iar 2 și 15 sunt mezii.
- $\frac{1,5}{7} = \frac{15}{70}$ este o proporție cu termenii 1,5, 7, 15 și 70, unde 1,5 și 15 sunt extremii, iar 7 și 15 sunt mezii.

PROPRIETATEA FUNDAMENTALĂ A UNEI PROPORȚII:

În orice proporție, produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Pentru orice $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporție, rezultă că: $ad = bc$.

EXEMPLE:

- $\frac{11}{12} = \frac{22}{24} \Rightarrow 11 \cdot 24 = 12 \cdot 22;$
- $\frac{6,4}{5} = \frac{12,8}{10} \Rightarrow 6,4 \cdot 10 = 5 \cdot 12,8.$

PROPRIETATE: Fiind date rapoartele $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, acestea formează o proporție dacă $ad = bc$.

✓ **EXERCIIII REZOLVATE:**

- Verificați dacă numerele 9, 7, 27 și 21 formează o proporție.

Soluție: Din $7 \cdot 27 = 9 \cdot 21$ rezultă $\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$. Deci cu cele patru numere putem forma o proporție.

2. Scrieți proporțiile care pot fi formate cu rapoartele:

$$\frac{4}{5}; \frac{36}{44}; \frac{46}{34}; \frac{7}{9}; \frac{9}{11}; \frac{23}{17}; \frac{32}{40}; \frac{21}{27}.$$

Soluție: Avem: $\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$ deoarece $7 \cdot 27 = 9 \cdot 21$;

$$\frac{4}{5} = \frac{32}{40} \text{ deoarece } 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32.$$

Analog se verifică că avem: $\frac{23}{17} = \frac{46}{34}$ și $\frac{9}{11} = \frac{36}{44}$.

3. Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dacă $bc = 53$, să se calculeze $15ad$.

Soluție: Avem $ad = bc = 53 \Rightarrow 15ad = 15 \cdot 53 = 795$.

4. Se știe că $\frac{1,5}{x} = \frac{y}{4, (3)}$. Aflați xy .

Soluție: Avem $xy = 1,5 \cdot 4, (3) = \frac{13}{2} = 6,5$.

5. Dacă $1, (5)x = 2, (7)y$, aflați $\frac{x}{y}$.

Soluție: Avem $\frac{x}{y} = \frac{2, (7)}{1, (5)} = \frac{25}{14}$.

6. Dacă $\frac{3}{a} = \frac{m}{n}$ și $am = 150$, să se determine n .

Soluție: Avem $3n = am \Leftrightarrow 3n = 150 \Leftrightarrow n = 50$.

7. Se știe că 20% din a este 30% din b . Aflați $\frac{a}{b}$.

Soluție: Putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{20}{100}a &= \frac{30}{100}b \Leftrightarrow \frac{1}{5}a = \frac{3}{10}b \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{3b}{10} \Leftrightarrow 10a = 15b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a = 3b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

► Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celalalt extrem}};$$

$$\text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celalalt mez}}.$$

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Avem $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$ sau $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$.

✓ **EXERCITIILE REZOLVATE:**

1. Dacă $\frac{a}{15} = \frac{3}{225}$, aflați a .

Soluție: Avem $a = \frac{3 \cdot 15}{225} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$.

2. Să se determine x în următoarele cazuri:

a) $\frac{x}{20} = \frac{4}{5}$;

b) $\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$;

c) $\frac{1}{x} = \frac{4}{7}$;

d) $\frac{4}{9} = \frac{16}{x}$;

e) $7 = \frac{x}{4}$;

f) $\frac{5}{x} = 2$;

g) $\frac{1}{\frac{4}{15}} = \frac{21}{x}$;

h) $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{x} = \frac{20}{3}$.

Soluție: a) $x = \frac{20 \cdot 4}{5} \Rightarrow x = 16$;

b) $x = \frac{8 \cdot 1}{2} \Rightarrow x = 4$;

c) $x = \frac{1 \cdot 7}{4} \Rightarrow x = 1,75$;

d) $x = \frac{9 \cdot 16}{4} \Rightarrow x = 36$;

e) $\frac{7}{1} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 4}{1} \Rightarrow x = 28$;

f) $\frac{5}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 1}{2} \Rightarrow x = 2,5$;

g) $\frac{15}{4} = \frac{21}{x} \Rightarrow x = \frac{21 \cdot 4}{15} \Rightarrow x = 5,6$;

h) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{9}{20x} = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{9}{20x} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 400x = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27}{400} \Rightarrow x = 0,0675$.

3. Să se afle:

a) S din $v = \frac{S}{t}$, $t \neq 0$;

b) F din $p = \frac{F}{S}$, $S \neq 0$;

c) R din $I = \frac{U}{R}$; $R \neq 0$, $I \neq 0$.

Soluție: Avem: a) $S = v \cdot t$; b) $F = S \cdot p$; c) $R = \frac{U}{I}$.

4. Raportul a două numere este $\frac{4}{7}$. Dacă cel mai mare dintre ele este 98, aflați celălalt număr.

Soluție: Avem: $\frac{a}{98} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{98 \cdot 4}{7} \Rightarrow a = 56$.

5. Fie $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $m, n, p, q \in \mathbb{Q}_+$, $n \neq 0$, $q \neq 0$. Dacă $mq = 0,12$, aflați valoarea expresiei:

$$(10np)^3 + 12mq - 1\frac{1}{4}.$$

6. Raportul capacităților a două vase este $\frac{9}{11}$. Știind că vasul mai mic are capacitatea de 27 l , aflați capacitatea vasului mai mare.

7. Raportul a două numere naturale este $\frac{6}{17}$, iar cel mai mic dintre acestea este 36. Aflați numărul mai mare.

**

8. Dacă $\frac{a}{5a-b} = \frac{15}{23}$, aflați $\frac{a}{b}$.

9. Dacă $\frac{5}{x} + \frac{11}{y} + \frac{23}{z} = \frac{110}{3}$, calculați $\frac{x+5}{x} + \frac{y+11}{y} + \frac{z+23}{z}$.

10. Dacă $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ și $\frac{3a+4b}{5a+3b} = \frac{16}{25}$, aflați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

11. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ care îndeplinesc simultan condițiile:

a) a este 30% din b ;

b) c este media aritmetică a numerelor $3a$ și $2b$;

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{14}$.

12. Mărind un număr cu 30% din el, obținem același rezultat ca atunci când scădem 600 din dublul său. Care este numărul?

13. Găsiți numerele a, b, c și d despre care se știe că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $2a = 3b$;

b) c este 40% din b ;

c) $\frac{c}{d} = 1,4$;

d) $a + b + c + d = 48$.